

Matemática Financeira

CONCEITOS BÁSICOS DA MATEMÁTICA FINANCEIRA

A consideração explícita do fator tempo em qualquer processo de transferência de recursos financeiros entre pessoas e/ou organizações é feita pela cobrança de juros, que é a remuneração atribuída à utilização do capital de pessoas e/ou organizações por outrem durante um determinado período de tempo. Assim, o conceito de juros diz respeito ao valor atribuído ao tempo, podendo ser encarado como “uma remuneração pelo sacrifício do consumo, que poderia ser realizado no presente, mas que, em virtude de uma decisão do poupador, o será no futuro” .

Apesar da aceitação quase natural, hoje, do pagamento de juros pelo uso do capital de terceiros, ao longo da história sempre houve muita restrição a essa prática, até mesmo em passagens bíblicas.

A qualquer processo de transferência de recursos financeiros entre pessoas e/ou organizações está associado um conjunto de entradas e saídas de recursos financeiros ao longo do tempo, denominado Fluxo de Caixa. Assim, tomando como referência o Fluxo de Caixa, em cada período de tempo existem Entradas provenientes das transferências financeiras correspondentes aos pagamentos feitos para um Fluxo de Caixa e Saídas associadas às transferências financeiras correspondentes aos recebimentos de um Fluxo de Caixa. O fluxo líquido de caixa em um período corresponde à soma algébrica das entradas (sinal negativo) e saídas (sinal positivo). Graficamente o Fluxo de Caixa pode ser representado pelo DIAGRAMA 1, onde as setas apontadas para cima representam saídas e as setas apontadas para baixo representam entradas.

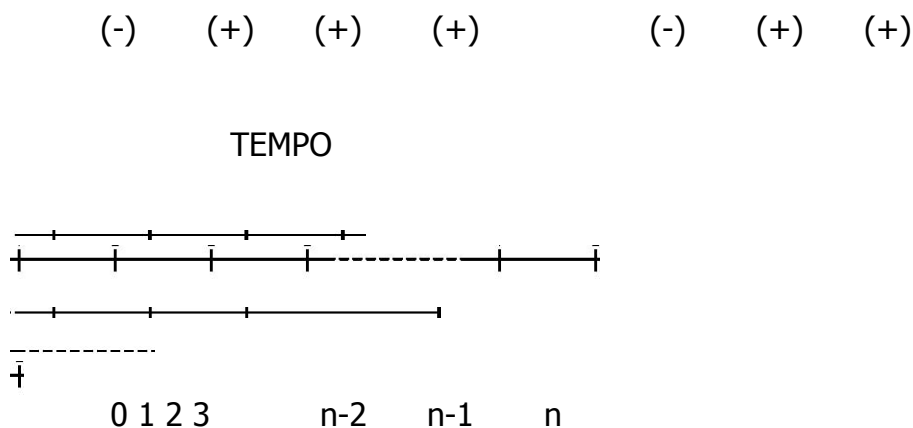


DIAGRAMA 1 – REPRESENTAÇÃO GRÁFICA DE UM FLUXO DE CAIXA

No DIAGRAMA 1, os períodos estão representados pelos números 0, 1, 2, ... , n-2, n-1, n. O tempo zero geralmente está associado ao início do conjunto de períodos enquanto que os números 1, 2, ..., n-2, n-1 e n referem-se ao final dos períodos 1, 2, ..., n-2, n-1 e n, respectivamente.

A Matemática Financeira trata das transformações de fluxos de caixa em outros (financeiramente) equivalentes, de modo a permitir comparações entre diferentes fluxos de caixa. Na determinação desses fluxos equivalentes, a Matemática

Financeira leva em conta a dimensão das entradas e saídas, introduzindo os juros associados à época em que acontecem essas entradas e saídas. A determinação do valor dos juros relativos a uma transação financeira é efetuada pela consideração de uma Taxa de Juros. A Taxa de Juros, sempre relacionada a um certo intervalo de tempo, nada mais é que a remuneração pela utilização, durante esse intervalo de tempo, de uma unidade de capital. A Taxa de Juros pode ser considerada como o “preço” cobrado pela utilização da unidade de capital durante o intervalo de tempo considerado.

Valor Atual de um Fluxo de Caixa, em uma data especificada, é a quantia financeiramente equivalente ao fluxo nessa data. Para uma dada Taxa de Juros, diferentes fluxos de caixa são financeiramente equivalentes quando seus valores atuais forem idênticos. Nesse sentido, o Valor Atual de um Fluxo de Caixa é de fundamental importância para a Matemática Financeira, pois se constitui na referência através da qual diferentes fluxos podem ser comparados. Sempre que a data for anterior à ocorrência de parcelas do fluxo, os juros referentes a essas parcelas devem ser abatidos, e o Valor Atual recebe a denominação de Valor Presente. Similarmente, quando a data for posterior à ocorrência de parcelas do fluxo, os juros referentes a essas parcelas devem ser incorporados e o Valor Atual recebe a denominação de Valor Futuro.

Quando a cobrança dos juros, em cada período, for baseada apenas no capital inicial empregado no tempo zero, denominado Principal, tem-se uma situação de Juros Simples. Quando juros forem cobrados também sobre juros, ou seja, quando a cobrança for baseada no capital inicial mais os juros dos períodos anteriores, a situação é denominada de Juros Compostos. Praticamente todas as transações financeiras são situações de juros compostos.

Montante de um Principal aplicado durante n períodos a uma certa Taxa de Juros por período é igual à soma do Principal com os juros relativos aos n períodos.

Desde que não tenha havido ainda nenhum pagamento visando abater parte da dívida contraída, o capital devedor no início de um período, para efeito de cobrança de juros durante esse período, é igual ao Principal, para uma situação de juros simples, e igual ao Montante, para juros compostos. Caso pagamentos (saídas) já tenham sido feitos, o capital devedor geralmente não coincide nem com o Principal nem com o Montante, tornando-se necessário conhecer as condições desses pagamentos.

O Regime de Capitalização define o processo de formação de juros, estabelecendo como os juros devem ser computados e incorporados ao capital devedor. Existem dois regimes de capitalização: o Discreto e o Contínuo. No Regime Discreto, os juros relativos a um dado período são computados no final desse período, enquanto que no Regime Contínuo os juros são computados de maneira contínua, durante todo o período. Assim, os juros referentes a um período são incorporados ao capital devedor somente no final do período em questão, para o regime discreto, e continuamente, durante todo o período, para o regime contínuo. Para efeitos de cobrança de juros, o capital devedor sofre mudanças descontínuas, no final do período, para o caso

discreto, e muda a todo instante, pelo acréscimo contínuo de juros, para o caso contínuo.

Taxa Efetiva de Juros por Período é a razão entre os juros cobrados sobre o capital devedor no início do período e esse capital devedor. Denotando por P o capital devedor no início do período e por F a soma desse capital com os juros cobrados durante o período, a Taxa Efetiva de Juros no período é dada por:

$$\frac{F - P}{P} = i \quad (1)$$

No caso de capitalização discreta, com Taxa Efetiva Discreta de Juros por Período igual a i, a aplicação da quantia P no tempo zero, e a sua reaplicação durante n períodos, dá origem aos resultados da TABELA 1.

| PERÍODO | CAPITAL DEVEDOR INICIAL | JUROS NO PERÍODO | MONTANTE NO FINAL |
|---------|-------------------------|---------------------------|-------------------|
| 1 | P | $i * P$ | $P * (1 + i)$ |
| 2 | $P * (1 + i)$ | $i * P * (1 + i)$ | $P * (1+i)^2$ |
| 3 | $P * (1 + i)^2$ | $i * P * (1 + i)^2$ | $P * (1 + i)^3$ |
| · | · | · | · |
| n | $P * (1 + i)^{(n-1)}$ | $i * P * (1 + i)^{(n-1)}$ | $P * (1 + i)^n$ |

TABELA 1 – CAPITALIZAÇÃO DISCRETA

A quantia F (Valor Futuro de P), financeiramente equivalente a P no final de n períodos é dada por:

$$F = P * (1+i)^n \quad (2)$$

onde:

$$(1+i)^n = \text{fator discreto de capitalização}$$

Analogamente, a quantia P (Valor Presente de F), financeiramente equivalente a F no início dos n períodos é dada por:

$$P = F / (1+i)^n = F * (1+i)^{-n} \quad (3)$$

onde:

$$(1+i)^{-n} = \text{fator discreto de desconto}$$

Em situações de juros simples, as taxas são sempre efetivas, pois o capital devedor no início de cada período independem dos juros incorridos durante períodos anteriores. Para juros compostos, entretanto, freqüentemente ocorrem situações em que o período a ser considerado para cálculo e capitalização dos juros não coincide com o período referenciado nas taxas. Nesses casos, as taxas são denominadas Taxas Nominais de Juros por Período. Um exemplo dessa situação ocorre quando a taxa fornecida é anual e os juros são capitalizados trimestralmente. Ou seja, durante o período referenciado na taxa nominal, existem subperíodos iguais, em cujos termos são computados juros sobre o capital devedor no início de cada um desses subperíodos. Assim, quando existirem m subperíodos iguais de capitalização para uma Taxa Nominal Discreta por Período igual a I , no término de cada subperíodo são computados e capitalizados juros de I/m sobre o capital devedor no início desse subperíodo. De acordo com a equação (1), a Taxa Efetiva Discreta de Juros por Período é dada por :

$$\frac{F - P}{P} = \frac{P * (1 + I / m)^m - P}{P} \quad (4)$$

Daí:

$$(1 + I / m)^m - 1 = i \quad (4a)$$

A Equação (4a) fornece a Taxa Efetiva Discreta de Juros por Período equivalente à taxa nominal discreta de juros por período I com m subperíodos de capitalização. Assim, o Valor Futuro resultante da aplicação do capital P durante n períodos à taxa de nominal discreta por período I , com capitalização de juros de I/m ao término de cada um dos m subperíodos, é calculado pela equação (2), com o valor de i dado pela equação (4a). O Valor Presente de uma quantia futura é obtida pela substituição de i , conforme equação (4a), na equação (3).

Quando o número m de subperíodos de capitalização for infinitamente grande, a taxa nominal recebe a denominação particular de Taxa Nominal Contínua de Juros, sendo representada por r . Para m tendendo a infinito, a equação (4a) fornece a Taxa Efetiva Contínua de Juros por Período:

$$\limite_{m \rightarrow \infty} ((1 + r / m)^m - 1) = \limite_{m \rightarrow \infty} ((1 + r / m)^{(m/r) \cdot r} - 1)$$

como:

$$\limite_{m \rightarrow \infty} (1+r/m)^{(m/r)} = e$$

Obtém-se então a seguinte expressão para a Taxa Efetiva Contínua de Juros por Período:

$$e^r - 1 \quad (5)$$

Quando as taxa efetivas contínua ($e^r - 1$) e discreta (i) forem iguais, os resultados finais obtidos em termos de capitalização ou descontos, são os mesmos. Isso significa que a aplicação da quantia P , tanto a Taxa Efetiva Contínua (capitalização contínua) como a Taxa Efetiva Discreta (capitalização discreta), resulta no mesmo Valor Futuro F no final de um período. Nesse caso:

$$i = e^r - 1 \quad (6)$$

ou então:

$$r = \ln(1 + i) \quad (7)$$

Substituindo na equação (2) o valor de i dado pela equação (6), tem-se a seguinte expressão para o Valor Futuro de P em regime contínuo de capitalização:

$$F = P * ((1 + e^r - 1))^n = P * e^{r*n} \quad (8)$$

Onde:

e^r = fator contínuo de capitalização

Analogamente ao caso discreto:

e^{-r} = fator contínuo de desconto.

Desde que haja igualdade entre as taxas efetivas discretas e contínuas, de acordo com a Equação (6), os valores de F calculados através da Equação (2) – Capitalização Discreta e da Equação (8) – Capitalização Contínua são idênticos.

FATORES DE CONVERSÃO DE FLUXOS DE CAIXA

Os fatores básicos de conversão que a Matemática Financeira utiliza para fazer comparações entre diferentes fluxos de caixa estão associados às seguintes situações de referência, para n períodos e uma dada taxa efetiva de juros por período.

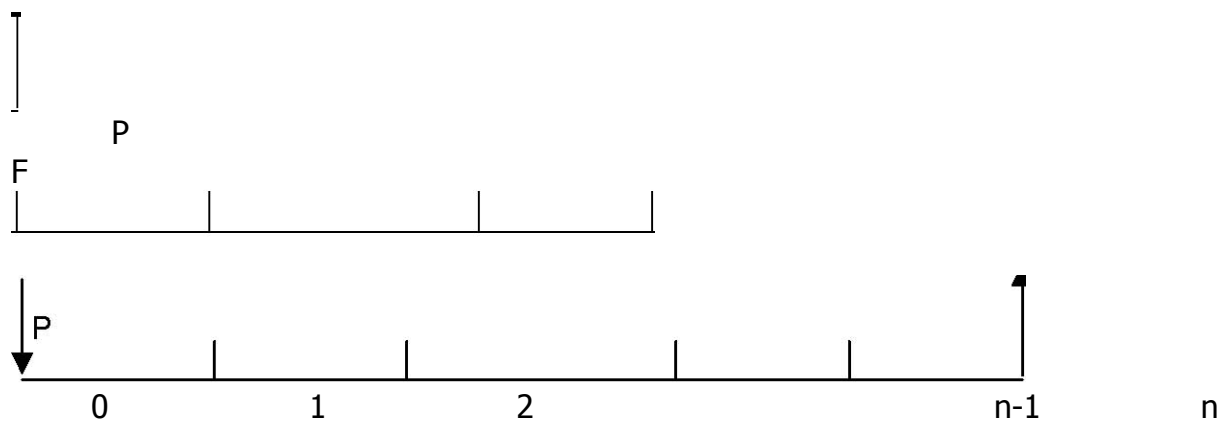
- a) Determinação, através do fator f/p , do Valor Futuro F no final de n períodos, financeiramente equivalente ao Valor Presente P no início dos n períodos (tempo zero).
- b) Determinação, através do fator p/f , do Valor Presente P no início de n períodos, financeiramente equivalente ao Valor Futuro F no final dos n períodos (tempo n).
- c) Determinação, através do fator a/p , de uma série uniforme de n Anuidades A_p de

um Valor Presente P , série essa financeiramente equivalente ao Valor Presente P no início dos n períodos (tempo zero).

- d) Determinação, através do fator p/a , do Valor Presente P no início dos n períodos (tempo zero), financeiramente equivalente à série uniforme de n Anuidades A_p de um Valor Presente P .
- e) Determinação, através do fator a/f , de uma série uniforme de n Anuidades A_f de um Valor Futuro F , série essa financeiramente equivalente ao Valor Futuro final dos n períodos (tempo n).
- f) Determinação, através do fator f/a , do Valor Futuro F no final dos n períodos (tempo n), financeiramente equivalente à série uniforme de n Anuidades A_f de um Valor Futuro F .

FATORES f/p e p/f

Os fatores de conversão (f/p) e (p/f) fazem a equivalência entre valores pontuais, separados por n períodos de tempo. Como mostrado no FLUXO 1, existe uma entrada igual a P no início do período 1 (tempo zero) e uma saída de F no final dos n períodos (tempo n).



FLUXO 1 – VALORES PONTUAIS

Com capitalização discreta e taxa efetiva discreta de juros por período igual a i , o Valor Futuro F de um Valor Presente P é dado por:

$$F = P \cdot (1+i)^n = P \cdot (f/p)_{i,n} \quad (9)$$

Onde:

$$(f/p)_{i,n} = (1+i)^n = \text{Fator Discreto de Valor Futuro de um Valor Presente}$$

De (9) obtém-se:

$$P = F*(1+i)^{-n} = F*(p/f)_{i,n} \quad (10)$$

Onde:

$$(p/f)_{i,n} = (1+i)^{-n} = \text{Fator Discreto de Valor Presente de um Valor Futuro}$$

Em regime de capitalização contínua, com taxa efetiva contínua igual à taxa efetiva discreta ($e^r - 1 = i$), as equações (9) e (10) passam a (11) e (12), respectivamente:

$$F = P*e^{r*n} = P*(f/p)_{r,n} \quad (11)$$

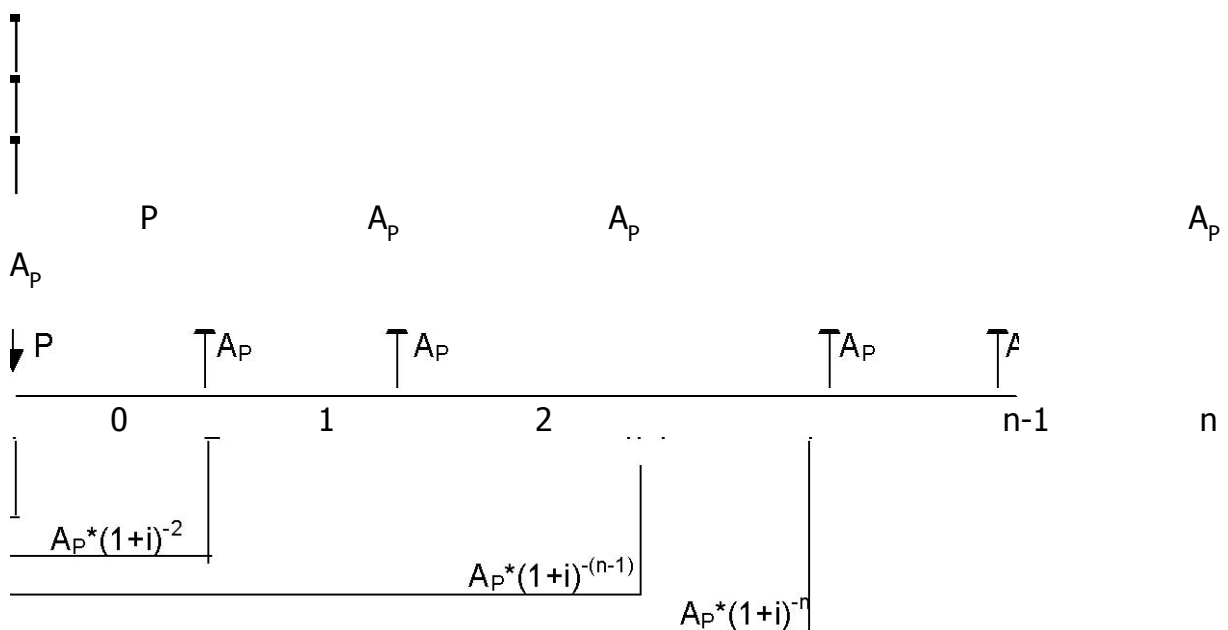
$$P = F*e^{-r*n} = F*(p/f)_{r,n} \quad (12)$$

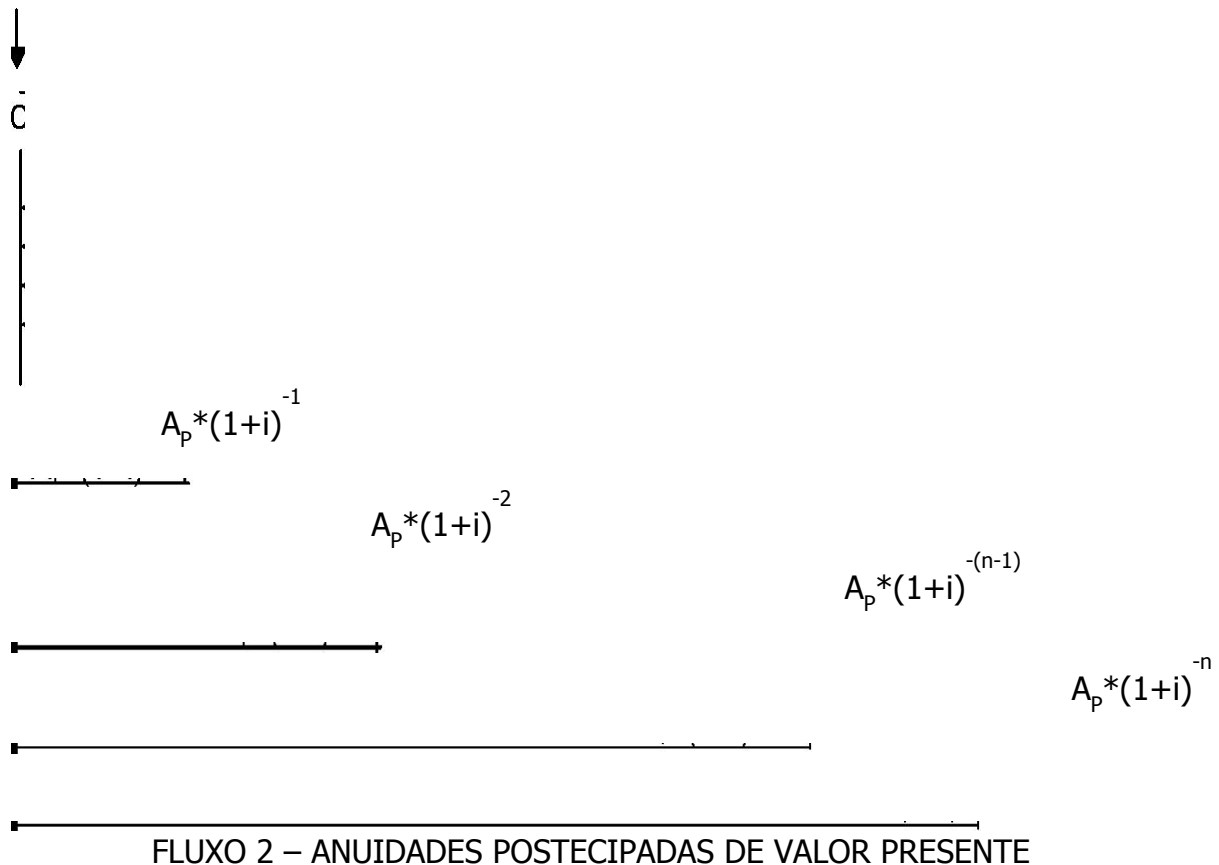
onde: $(f/p)_{r,n} = e^{r*n} = \text{Fator Contínuo de Valor Futuro de um Valor Presente}$

$(p/f)_{r,n} = e^{-r*n} = \text{Fator Contínuo de Valor Presente de um Valor Futuro}$

FATORES (a/p) e (p/a)

Os fatores de conversão (a/p) e (p/a) fazem a equivalência entre um Valor Presente P no início de n períodos (tempo zero) e uma série uniforme de n parcelas iguais, uma em cada período. Inicialmente é obtido o fator para parcelas ocorrendo no final de cada um dos n períodos, como no FLUXO 2. Neste caso, as parcelas são denominadas Anuidades Postecipadas.





Conforme mostrado no FLUXO 2, com capitalização discreta e taxa efetiva discreta de juros por período igual a i , o Valor Presente da parcela A_p ao final do período j , $j = 1, 2, \dots, n-1, n$, é dado por:

$$A_p * (1+i)^{-j} \quad (13)$$

A equivalência entre P e a série uniforme de n parcelas é então:

$$P = A_p * (1+i)^{-1} + A_p * (1+i)^{-2} + \dots + A_p * (1+i)^{-(n-1)} + A_p * (1+i)^{-n} =$$

$$A_p * ((1+i)^{-1} + (1+i)^{-2} + \dots + (1+i)^{-(n-1)} + (1+i)^{-n})$$

A expressão entre parênteses que multiplica A_p é a soma dos n primeiros termos de uma progressão geométrica de razão $q = (1+i)^{-1}$, primeiro termo $a_1 = (1+i)^{-1}$ e último termo igual a $a_n = (1+i)^{-n}$. Como a soma dos n termos de uma progressão geométrica é dada por:

$$S_n = \frac{a_n * q - a_1}{q - 1}$$

$$q - 1$$

expressão que multiplica A_p é:

$$\frac{(1+i)^{-n} * (1+i)^{-1} - (1+i)^{-1}}{(1+i)^{-1} - 1} = \frac{(1+i)^{-n} - 1}{-i}$$

Multiplicando o numerador e o denominador de

$$\frac{(1+i)^n - 1}{i*(1+i)^n} \quad (15)$$

Substituindo esse valor de S_n na expressão de

$$P = A_p * \frac{(1+i)^n - 1}{i*(1+i)^n} = A_p * (p/a)_{i,n} \quad (16)$$

a expressão que multiplica A_p é:

$$S_n = \frac{(1+i)^{-n} * (1+i)^{-1} - (1+i)^{-1}}{(1+i)^{-1} - 1} = \frac{(1+i)^{-n} - 1}{-i} \quad (14)$$

Multiplicando o numerador e o denominador de (14) por $(1+i)^n$, obtém-se:

$$S_n = \frac{(1+i)^n - 1}{i*(1+i)^n} \quad (15)$$

Substituindo esse valor de S_n na expressão de P:

$$P = A_p * \frac{(1+i)^n - 1}{i*(1+i)^n} = A_p * (p/a)_{i,n} \quad (16)$$

onde: $(p/a)_{i,n}$ = Fator Postecipado Discreto de Valor Presente de uma Anuidade.

De (16) obtém-se:

$$A_p = P \frac{i(1+i)^n}{(1+i)^n - 1} = P (a/p)_{i,n} \quad (17)$$

onde: $(a/p)_{i,n}$ = Fator Postecipado Discreto de Anuidade de um Valor Presente.

O conjunto de fatores $(a/p)_{i,n}$ para diferentes valores de i e n é usualmente conhecido como "Tabela Price". A aplicação dos valores dessa Tabela para definir a série uniforme de n parcelas A_p , financeiramente equivalente ao Principal P no tempo zero dá origem ao Sistema Price de Financiamento.

O valor A_p de cada uma das parcelas j tem dois componentes:

- Juros no período j , obtido pela multiplicação da taxa efetiva de juros por período pelo capital devedor no início do período j ;
- Amortização do Principal no período, obtido pela diferença entre o valor de A_p e os juros no período.

Como:

- A taxa de juros por período permanece constante durante todos os períodos;
- O capital devedor no início do período diminui a cada período devido à amortização do principal;
- O valor A_p de cada parcela é igual em todos os períodos,

conclui-se que os juros em cada parcela diminuem, enquanto que a amortização aumenta período a período. Por exemplo, para $P= 1.000$, $i= 6\%$ e $n= 3$, obtém-se:

$$(a/p)_{6,3} = 0,37411 \text{ e } A_p = P (a/p)_{6,3} = 1000 * 0,37411 = 374,11$$

A TABELA 2 mostra o capital devedor no início dos períodos bem como a composição, em termos de juros e amortização, de cada uma das três parcelas iguais a A_p .

| PERÍODO | CAPITAL DEVEDOR INICIAL | JUROS | AMORTIZAÇÃO |
|---------|-------------------------|------------------------|-------------------------|
| 1 | 1000,00 | 1000,00 * 0,06 = 60,00 | 374,11 - 60,00 = 314,11 |

| | | | |
|--------|------------------------------|--------------------------|----------------------------|
| 2 | 1000,00 – 314,11 = 685,89 | 685,89 * 0,06 = 41,15 | 374,11 - 41,15 = 332,96 |
| 3 | 685,89 – 332,96 = 352,93 | 352,93 * 0,06 = 21,18 | 374,11 - 21,18 = 352,93 |
| TOTAIS | - | 122,33 | 1000,00 |

TABELA 2 – COMPOSIÇÃO JUROS x AMORTIZAÇÃO

Quando o número de períodos, e conseqüentemente o número de anuidades, for infinitamente grande, a anuidade é denominada Perpetuidade e os fatores (a/p) e (p/a) transformam-se em i e 1/i, respectivamente:

$i = (a/p)_{i, \infty}$ = Fator Postecipado Discreto de Perpetuidade de um Valor Presente

$1/i = (p/a)_{i, \infty}$ = Fator Postecipado Discreto de Valor Presente de uma Perpetuidade

Em Regime de Capitalização contínua, com Taxa Efetiva Contínua igual à Taxa Efetiva Discreta ($e^r - 1 = i$), as Equações (16) e (17) passam a (18) e (19), respectivamente:

$$(18) \quad p = Ap * \frac{e^{r*n} - 1}{(e^r - 1) * e^{r*n}} = Ap * \left(\frac{p}{a}\right)_{r, n}$$

$$(19) \quad Ap = p * \frac{(e^r - 1) * e^{r*n}}{e^{r*n} - 1} = A * \left(\frac{a}{p}\right)_{r, n}$$

onde:

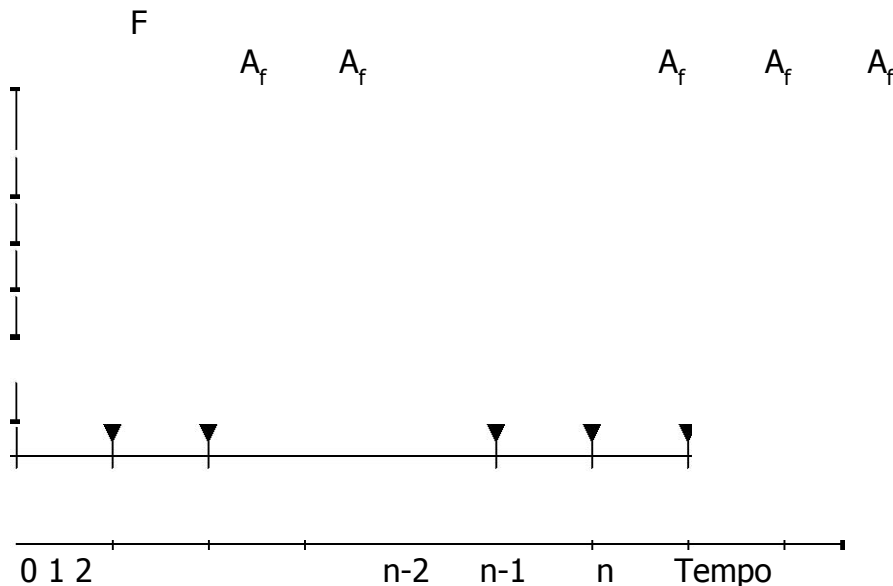
$(p/a)_{r, n}$ = Fator Postecipado Contínuo de Valor Presente de uma Anuidade

$(a,p)_{r, n}$ = Fator Postecipado Contínuo de Anuidade de um Valor Presente

- Gradientes (aritmético e geométrico)
- Anuidades (diferidas e antecipadas)

FATORES (a/f) & (f/a)

Os fatores de conversão (a/f) e (f/a) fazem a equivalência entre um Valor Futuro F no final de n períodos e uma série uniforme de n parcelas iguais, uma em cada período. Inicialmente é obtido o fator para parcelas ocorrendo no final dos n períodos, como no FLUXO 3. Nesse caso, as parcelas são denominadas Anuidades Postecipadas de um Valor Futuro.



FLUXO 3 – ANUIDADES POSTECIPADAS DE UM VALOR FUTURO

Conforme mostrado graficamente na FIGURA 2, com Capitalização Discreta e Taxa Efetiva Discreta de Juros por Período igual a i , o Valor Futuro da parcela relativa ao final do período j , $j= 1, \dots, n$ é dado por:

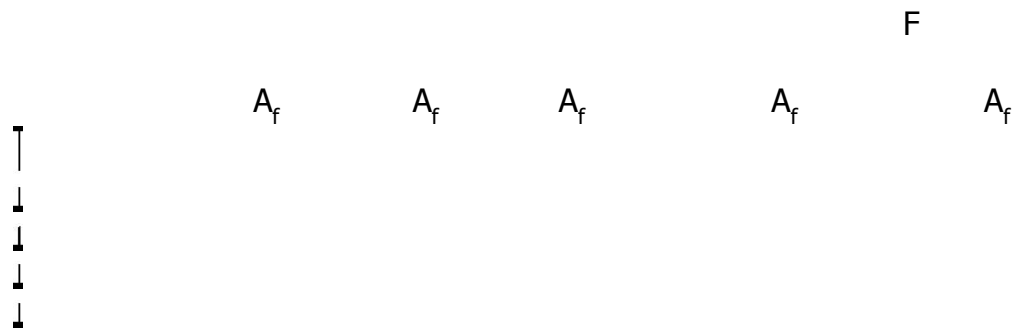
$$A_f * (1+i)^{(j-1)} \quad (20)$$

A equivalência entre F e a série uniforme de n parcelas é então:

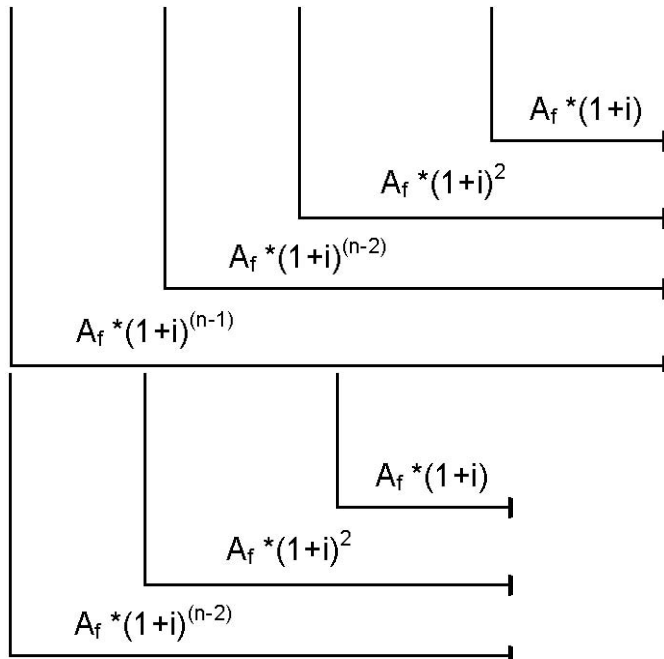
$$\begin{aligned} F &= A_f + A_f * (1+i) + A_f * (1+i)^2 + A_f * (1+i)^{(n-2)} + A_f * (1+i)^{(n-1)} = \\ &= A_f * (1 + (1+i) + (1+i)^2 + \dots + (1+i)^{(n-2)} + (1+i)^{(n-1)}) \end{aligned}$$

A expressão entre parênteses que multiplica A_f é a soma dos n primeiros termos de uma progressão geométrica com razão $q=(1+i)$, primeiro termo $a_1=1$ é último termo $a_n=(1+i)^{(n-1)}$. Assim, a expressão que multiplica A_f é:

$$S_n = \frac{(1+i)^{(n-1)} * (1+i) - 1}{(1+i) - 1} = \frac{(1+i)^n - 1}{i} \quad (21)$$



0 1 2 n-2 n-1 n Tempo



$$A_f * (1+i)$$

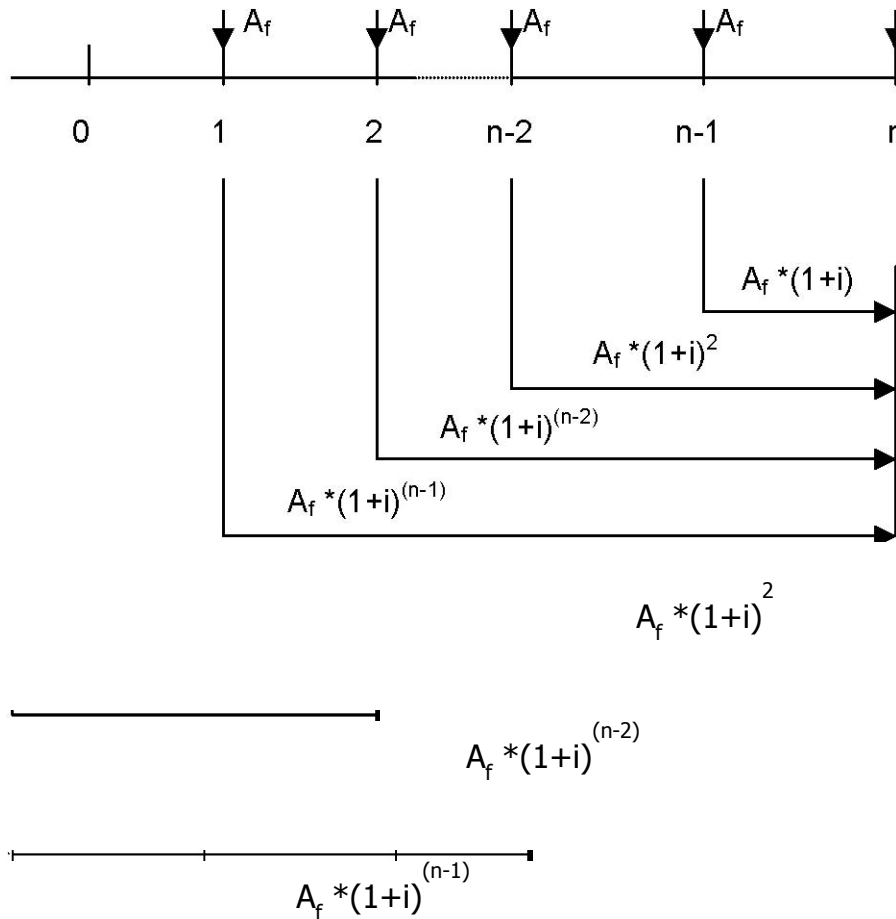


FIGURA 2: VALORES FUTUROS DAS ANUIDADES

Substituindo esse valor de S_n na expressão de F:

$$F = A_f \cdot \frac{(1+i)^n - 1}{i} = A_f \cdot (f/a)_{i,n} \quad (22)$$

onde : $(f/a)_{i,n}$ = Fator Postecipado Discreto de Valor Futuro de uma Anuidade

Da Equação (22) obtém-se:

$$A_f = F \cdot \frac{i}{(1+i)^n - 1} = F \cdot (a/f)_{i,n} \quad (23)$$

$$(1+i)^n - 1$$

$(a/f)_{i,n}$ = Fator

de Capitalização Discreta (e^r -amente:

$$\frac{e^{r \cdot n} - 1}{e^r - 1}$$

$$\frac{e^r - 1}{(1+i)^n - 1}$$

onde: $(a/f)_{i,n}$ = Fator Postecipado Discreto de Anuidade de um Valor Futuro

Em Regime de Capitalização contínua, com Taxa Efetiva Contínua igual à Taxa Efetiva Discreta ($e^r - 1 = i$), as Equações (22) e (23) passam a (24) e (25), respectivamente:

$$F = A_f * \frac{e^{r \cdot n} - 1}{e^r - 1} = A_f * (f/a)_{r,n} \quad (24)$$

$$A_f = F * \frac{e^r - 1}{e^{r \cdot n} - 1} = A_f * (f/a)_{r,n} \quad (25)$$

onde: $(f/a)_{r,n}$ = Fator Postecipado Contínuo de Valor Futuro de uma Anuidade

$(a/f)_{r,n}$ = Fator Postecipado Contínuo de Anuidade de um Valor Futuro

MÉTODOS DE COMPARAÇÃO DE FLUXOS DE CAIXA

Os métodos mais usuais para comparação de fluxos de caixa são os seguintes:

a- MÉTODO DO VALOR PRESENTE LÍQUIDO: Baseado nos valores presentes líquidos

dos fluxos:

"Quando maior o valor presente líquido melhor é o fluxo".

b- MÉTODO DO VALOR PRESENTE POR PERÍODO: Transforma cada Fluxo de Caixa em uma série uniforme de n parcelas, financeiramente equivalentes ao fluxo:

"Quanto maior o valor presente por período melhor é o fluxo".

c- MÉTODO DA TAXA INTERNA DE RETORNO: Determina o valor da taxa de desconto que torna o valor atual das entradas igual (financeiramente equivalente) ao valor atual das saídas do Fluxo de Caixa:

"Quando maior a taxa interna de retorno melhor é o fluxo".

A escolha de um desses métodos depende da natureza do problema, da preferência dos autores da comparação e, principalmente, da clareza dos resultados para os decisores.

O Método do Valor Presente Líquido constitui-se na forma mais direta de comparação pois fornece, em termos absolutos, o quanto um fluxo é maior que outro.

O método do Valor Presente por Período, apesar de ser apenas uma variante do Método do Valor Presente Líquido, permite comparações que levem em conta resultados absolutos associados a cada período. Como a maioria das demonstrações contábeis são periódicas, esse método é muito fácil de ser compreendido e aplicado.

O grande interesse dos responsáveis pelas áreas financeiras das empresas por taxas de retorno resultantes de fluxos de caixa faz com o Método da Taxa Interna de Retorno seja bastante utilizado na prática.

Comparações envolvendo fluxos de caixa com mesmo número de períodos não apresentam dificuldades em nenhum dos métodos. Todavia, quando as durações dos fluxos forem diferentes, pode ser necessário fazer algumas hipóteses sobre aumentos ou diminuições de períodos, de modo a torná-los comparáveis.

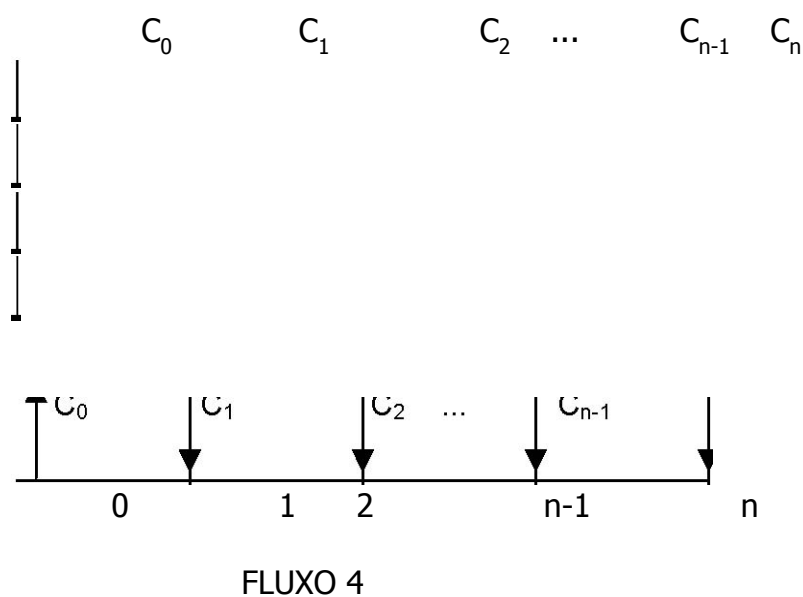
MÉTODO DO VALOR PRESENTE LÍQUIDO

Para uma dada taxa de juros por período, diferentes fluxos de caixa são financeiramente equivalentes quando seus valores atuais forem idênticos. Isso leva imediatamente ao Método do Valor Presente Líquido.

Segundo esse método, como as entradas têm sinal positivo no Fluxo de Caixa, um fluxo é MELHOR que qualquer outro que tenha Valor Presente Líquido MENOR.

A taxa à qual os valores no fluxo são descontados é a Taxa de Custo de Capital da Empresa por Período.

Considerando um fluxo líquido de caixa igual a C_0 no tempo zero e igual a C_1, C_2, \dots, C_n , no final de cada um dos n períodos, obtém-se o FLUXO 4.



Com uma Taxa de Custo de Capital da Empresa por Período igual a k , o Valor Presente Líquido - VPL do fluxo no tempo zero é igual a;

$$\text{VPL}(0) = -C_0 + \frac{C_1}{(1+k)} + \frac{C_2}{(1+k)^2} + \dots + \frac{C_n}{(1+k)^n} \quad (26)$$

MÉTODO DA TAXA INTERNA DE RETORNO

A Taxa Interna de Retorno – TIR correspondente aos valores mostrados no FLUXO 4 é a taxa t que satisfaz a:

$$0 = -C_0 + \frac{C_1}{1+t} + \frac{C_2}{(1+t)^2} + \dots + \frac{C_n}{(1+t)^n} \quad (27)$$



FLUXO 4

Taxa de Custo de Capital da Empresa por Período - VPL do fluxo no tempo zero é igual a;

$$V_0 + \frac{C_1}{(1+k)} + \frac{C_2}{(1+k)^2} + \dots + \frac{C_n}{(1+k)^n}$$

A TAXA INTERNA DE RETORNO

Taxa Interna de Retorno – TIR correspondente aos fluxos de caixa a taxa t que satisfaz a:

$$\frac{C_1}{(1+t)} + \frac{C_2}{(1+t)^2} + \dots + \frac{C_n}{(1+t)^n} = 0$$

Se o fluxo líquido em questão representar um investimento com entradas e saídas durante n períodos, ter uma $TIR = t$ por período significa que se o investimento for financiado com recursos de terceiros a uma Taxa de Juros por Período igual a t , as entradas geradas pelo investimento serão exatamente suficientes para amortizar o Principal e pagar os juros durante os n períodos. Assim, fazer um investimento cujo Fluxo de Caixa tenha uma $TIR = t$ por período é vantajoso sempre que t for superior à Taxa de Custo de Capital por Período. Exatamente por ser independente da Taxa de Custo de Capital é que a TIR é denominada "Taxa Interna", pois depende apenas dos valores no fluxo.

No Método da Taxa Interna de Retorno, a taxa de desconto (igual a TIR) pode mudar para diferentes fluxos enquanto que o Valor Presente Líquido de qualquer fluxo é sempre igual a zero. No Método do Valor Presente Líquido acontece exatamente o contrário: a taxa de desconto é sempre constante (igual à Taxa de Custo de Capital) e o Valor Presente Líquido pode mudar de acordo com o fluxo.

Exercícios sobre juros simples

- Qual o montante acumulado por um aplicador que empregou a quantia de R\$ 1.000,00 por 5 meses, sabendo-se que a taxa de juros simples contratada foi de

3,24% ao mês?

$$S = 1162$$

Qual o valor do rendimento dessa aplicação? Qual o fator de capitalização simples que permitiu a obtenção do montante da operação?

$$\text{Rendimento} = 162 \quad \text{Fator de Capt Simples} = 1,162$$

2. Qual o montante acumulado ao fim de 8 meses, resultante da aplicação de um capital de R\$ 5.000,00 à taxa de juros simples de 2,15% ao mês? Qual o fator de capitalização gerador do montante da aplicação?

$$S = 5860 \quad \text{Fator de Capt} = 1,172$$

3. Qual o capital que aplicado à taxa de juros simples de 18,75% ao trimestre, proporciona ao aplicador, ao fim de 1 ano e meio, o rendimento de R\$ 1.687,50?

$$P = 1500$$

4. Qual o capital que, tendo sido aplicado 2 meses atrás à taxa de juros lineares de 3,00%, está proporcionando a seu possuidor, hoje, o rendimento de R\$ 1.200,00?

$$P = 20000$$

5. A que taxa mensal de juros simples, o capital de 2.000,00 foi aplicado, de forma a produzir o montante de R\$ 3.600,00 ao fim do prazo de 10 meses?

$$i = 8\% \text{ am}$$

6. Qual a taxa mensal de juros simples a que foi aplicado o capital de R\$ 5.000,00 pelo prazo de 2 anos e que proporcionou, ao fim desse prazo, o rendimento de R\$ 480,00?

$$i = 0,4\% \text{ am}$$

7. O Banco ABC S/A cobra de seus clientes juros simples de 12% ao mês sobre saldos negativos em contas especiais. Quais os juros cobrados de um cliente cuja conta ficou negativa em R\$ 1.800,00 por 9 dias?

$$\text{Rendimento} = 64,80$$

8. Qual o prazo necessário para que o capital de R\$ 7.500,00, aplicado à taxa anual de juros lineares de 30%, proporcione o montante de R\$ 9.750,00?

$$n = 1 \text{ ano}$$

9. Qual o valor a ser resgatado por um investidor que aplicou a quantia de R\$

2.580,00, pelo prazo de 2 anos e 1 mês, à taxa linear de juros de 10,35% ao trimestre?

$$S = 4805,25$$

10. Em que prazo a quantia de R\$ 10.000,00, empregada a juros simples semestrais de 14, 40%, produziria o montante de R\$ 29.800,00?

$$n = 13,75 \text{ semestres} = 82,5 \text{ meses}$$

Exercícios sobre juros compostos

1. Uma aplicação de R\$ 5.000,00 é feita pelo prazo de 2 meses a juros compostos de 5% ao mês. Qual o montante proporcionado pela aplicação? Qual o rendimento auferido pelo aplicador?

$$S = 5512 \quad J = 512,50$$

2. O gerente de um Banco oferece a um cliente a possibilidade de aplicar seu dinheiro num título de 90 dias, cujo valor de resgate é de R\$1.157,63. Quanto deverá ser aplicado pelo cliente na aquisição do papel para que a taxa de juros auferida na operação seja de 5% ao mês a.m.?

$$P = 1000$$

3. Calcule o valor de resgate de uma aplicação, feita a juros compostos pelo prazo de 4 trimestres, à taxa de 5% ao trimestre, a partir de um capital de R\$ 10.000,00.

$$S = 12.155,06$$

4. Um empréstimo de R\$ 3.600,00 foi contratado pelo prazo de 270 dias, a juros de 5% a.m. capitalizados mensalmente. Por quanto foi quitada a obrigação no seu vencimento?

$$S = 5584,78$$

5. Uma pessoa aplica hoje, no Banco ABC S/A, a quantia de R\$ 10.000,00 à taxa de juros de 5% a.t. Ao fim de 1 trimestre o montante resgatado é reaplicado no Banco DEF S/A por 4 meses à taxa de 5% a.m. Qual o montante obtido ao fim do prazo da aplicação no Banco DEF S/A?

$$S = 12.762,82$$

6. Que quantia deverá ser aplicada numa instituição financeira que remunera seus aplicadores à taxa de 5% a.m., para que se tenha direito, ao fim de 1 trimestre, ao montante de R\$ 13.891,50.

$$P = 12000$$

7. Um título de crédito que vence daqui a 60 dias está sendo adquirido hoje, garantindo ao investidor a taxa de juros de 5% ao mês. O título tem valor de face de R\$ 100.000,00. Calcule o preço de aquisição do papel.

$$S = 90.702,95$$

8. Suponha que um mês após a realização financeira do exercício 7 o primeiro adquirente do papel revenda-o por R\$ 96.153,50. Qual a rentabilidade que o novo investidor obterá, se carregar o papel até o vencimento?

$$i = 4\%$$

9. Um Banco emprestou a um cliente, em 03-04-99, a quantia de R\$ 2.000,00 à taxa de 5% ao mês. Foi emitida pelo tomador, na ocasião, uma Nota Promissória com vencimento em 18-05-99. Qual o **VALOR NOMINAL** da NP?

$$S = 2.151,86$$

10. Uma pessoa comprou uma televisão numa loja comercial da seguinte forma: uma entrada de R\$ 300,00; R\$ 400,00 em 30 dias; R\$ 500,00 em 60 dias. Qual o valor à vista da TV considerando a taxa de juros de 5% a.m.?

$$P = 1134,46$$

11. Qual a taxa mensal de juros compostos a que foi aplicado o capital de R\$ 20.000,00, e que proporcionou a seu possuidor o montante de R\$ 24.310,13, ao fim de 1 quadrimestre?

$$i = 5\%$$

12. Qual a taxa mensal de juros compostos a que deve ser aplicado um determinado capital, de forma que, ao fim de um trimestre, o rendimento da aplicação seja equivalente à 15,7625% do principal?

$$i = 5\%$$

13. Qual o prazo em que o capital de R\$ 1.000,00, aplicado a taxa de 5% ao mês, rende juros de R\$ 215,51?

$$n = 4 \text{ meses}$$

14. Uma pessoa deve à outra a quantia de R\$ 1.157,63, expressa num título de crédito que vence daqui a 3 meses, ou seja, o valor de face do título é de R\$ 1.157,63. O devedor propõe ao credor, em substituição àquela dívida vencível em 3 meses, o pagamento da quantia de R\$ 1.407,10 daqui a 7 meses.

Considerando a taxa de juros de 5% ao mês, verifique se a proposta feita pelo devedor é equivalente à dívida original.

Sim $P = 1000$

15. Uma pessoa desejando acumular determinado valor ao fim de 8 meses faz, num Fundo de Investimentos, os seguintes depósitos: R\$ 300,00 hoje; R\$ 600,00 daqui a três meses; R\$ 500,00 ao fim de seis meses. Qual o valor acumulado ao fim de oito meses? A taxa de juros da operação é de 5% a.m. $S = 1760,7689$

Exercícios sobre desconto

1. Numa operação financeira uma duplicata de R\$ 10.000,00, vencível em 45 dias, foi resgatada antecipadamente pelo modo racional simples à taxa de 6% ao mês. Qual o valor atual da duplicata

Indique o fator de desconto considerado na operação.

$$VA = 9174,31$$

2. Qual o valor atual de uma NP que vence daqui a 60 dias, sabendo que ela foi descontada à taxa simples mensal de 5%? O valor da duplicata é de R\$ 10.000,00.

$$VA = 9000$$

3. Uma empresa necessitada de capital de giro recorre ao Banco Comercial ABC S/A, com o qual normalmente faz suas operações financeiras, e que apresenta para desconto uma duplicata de R\$ 25.000,00 que vence em 27 dias. Qual o valor a ser creditado na conta da empresa, referente a tal operação, considerando que a taxa de desconto praticado pelo Banco é de 4,5% ao mês?

$$VA = 23987,50$$

4. Um título de Valor Nominal igual a R\$ 10.000,00 vence daqui a 60 dias. O título está sendo descontado num Banco Comercial à taxa de juros de 6% ao mês. Qual o valor a ser liberado pelo possuidor do título? Qual a taxa efetiva mensal de juros compostos(taxa implícita) da operação?

$$VA = 8800 \quad i = 6,60$$

5. Uma empresa necessitada de capital de giro optou por obter recursos de curto prazo através do desconto de duplicatas mantidas em carteira. Qual a efetiva taxa mensal de juros compostos desta modalidade de captação de recursos (que pode ser também chamada de custo efetivo de operação em termos de taxa de juros), sabendo que a companhia descontou no Banco ABC S/A um lote de 20 duplicatas, no valor total de R\$ 12.000,00, todas de vencimento em 30 dias?

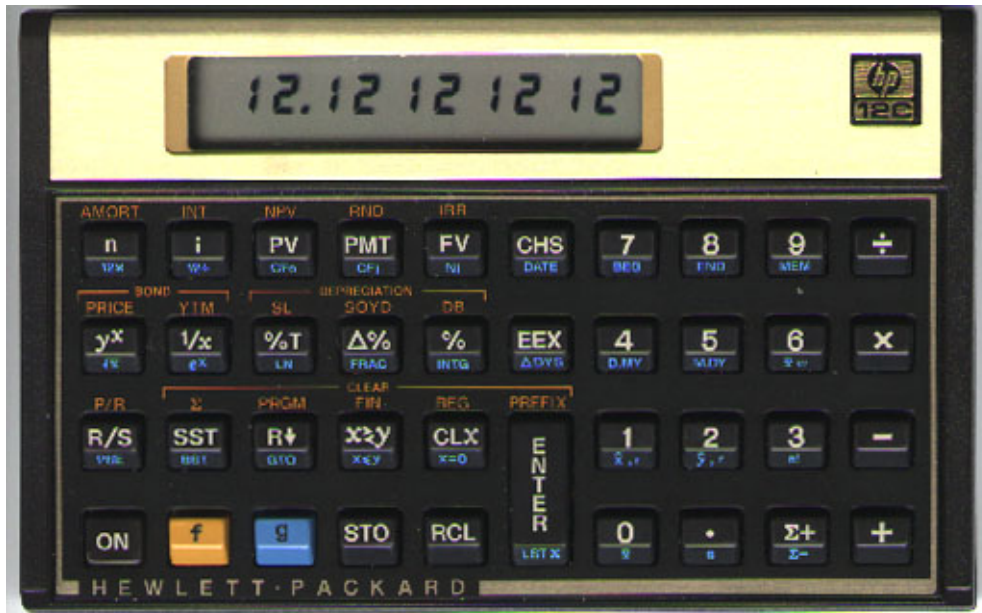
A taxa de desconto praticada pelo Banco foi de 6%.

Obs.: A taxa de serviço é de R\$ 15,00 por duplicata descontada.

O IOF é cobrado à razão de 15% ao ano e aplicado sobre o valor da operação.

Curso de Matemática financeira

Sim $P = 1000$ $i = 10,80$



MATEMÁTICA FINANCEIRA Usando a HP 12C

AULA 1:

Definições

O que são juros? Por que variam tanto? Risco. Inflação - ilusão de remuneração. Taxa de juros nominal, efetiva e real.

O **juro** é a remuneração pelo empréstimo do dinheiro. Ele existe porque a maioria das pessoas prefere o consumo imediato, e está disposta a pagar um preço por isto. Por outro lado, quem for capaz de esperar até possuir a quantia suficiente para adquirir seu desejo, e neste ínterim estiver disposta a emprestar esta quantia a alguém, menos paciente, deve ser recompensado por esta abstinência na proporção do **tempo e risco**, que a operação envolver.

O tempo, o risco e a quantidade de dinheiro disponível no mercado para empréstimos definem qual deverá ser a remuneração, mais conhecida como **taxa de juros**.

O governo quando quer diminuir o consumo, tentando com isso conter a inflação, diminui a quantidade de dinheiro disponível no mercado para empréstimos. Assim, a remuneração deste empréstimo fica muito alta para quem paga, desmotivando-o a consumir imediatamente e atraente para quem tem o dinheiro, estimulando-o a poupar.

Na época de inflação alta, quando a caderneta de poupança pagava até 30% ao mês, alguns tinham a falsa impressão de que logo

<http://www.opportunity.ubbihp.com.br>

Curso de Matemática financeira

ficariam ricos, com os altos juros pagos pelo banco. O que não percebiam é que, dependendo do desejo de consumo, ele poderia ficar cada vez mais distante, subindo de preço numa proporção maior que os 30% recebidos.

A taxa de juros que o banco cobra e paga inclui, além de itens como o risco e o tempo de empréstimo, a expectativa de inflação para período.

Esta taxa, quando vem expressa por um período que não coincide com o prazo de formação dos juros (**capitalizações**), é chamada de **taxa nominal**. Ex.: 15% ao ano, cujos juros são pagos mensalmente. Nestes casos precisamos calcular a **taxa efetiva**, que será a taxa nominal dividida pelo número de capitalizações que inclui, acumulada pelo prazo de transação. Veremos com mais detalhes mais adiante.

A remuneração real, ou **taxa real** de uma aplicação será calculada excluindo-se o percentual de inflação que a taxa efetiva embute.

AULA 2:

Conhecendo a HP-12C

3 Diferentes funções. Limpar as memórias antigas.

Introduzir números na memória. Cálculos Simples.

A HP-12C é uma calculadora financeira, que facilitará nossos cálculos. Aqueles que queiram se familiarizar com a HP, damos algumas dicas: esta calculadora possui até três funções por tecla: brancas, amarelas e azuis. As funções brancas são automáticas. As funções amarelas e azuis aparecem acima e abaixo das teclas, e é necessário que se aperte antes a tecla **f** ou **g**, respectivamente, para ativá-las. Abaixo as operações básicas pela HP-12C:

- ligar a calculadora - [**ON**]
- apagar o que tem no visor - [**CLX**]
- apagar o que tem nas memórias financeiras - [**f**] [**REG**]
- introduzir um número - [**número**] [**ENTER**]
- fazer um cálculo simples - [**número**] [**ENTER**] [**número**] [**operação**]
- Cálculo percentual - [**número**] [**ENTER**] [**percentual**] [**%**]
- potenciação - [**número**] [**ENTER**] [**potência**] [Y^X]
- radiciação - [**número**] [**ENTER**] [**raiz**] [$1/X$] [**Y**]
- armazenar na memória - [**número**] [**ENTER**] [**STO**] [**Número qualquer**]
- buscar um número na memória - [**RCL**] [**número onde foi armazenado**]
- fixar quantidade de casa decimais - [**f**] [**número de casas decimais**]

| Exemplos | Calculadora |
|-------------------------------------|-------------------------------------|
| Soma: $45 + 63 = 108$ | 45 [ENTER] 63 [+] |
| Multiplicação: $37 \times 14 = 518$ | 37 [ENTER] 14 [x] |

Curso de Matemática financeira

| | |
|---|---------------------------------------|
| Cálculos contínuos: $(28 + 54) / 8 = 10.50$ | 28 [ENTER] 54 [+] 8 [/] |
| Percentual: 12% de 1500 = 180 | 1500 [ENTER] 12 [%] |
| Potenciação: $15^4 = 50.625$ | 15 [ENTER] 4 [Y] |
| Radiciação: $\sqrt[4]{625} = 5$ | 625 [ENTER] 4 [1 / X] [Y] |
| Radiciação: $\sqrt[4]{\frac{3}{5}} = 3.34$ | 5 [ENTER] 3 [ENTER] 4 [/] [Y] |

AULA 3:

Propriedades da Matemática
 Propriedades das Potências
 Propriedades dos Radicais

É importante lembrar e entender alguns conceitos da matemática, que serão muito úteis, quando trabalharmos com taxas.

$$1) a \times a \times a \times a \times a = a^5$$

$$2) a^{m/n} = \sqrt[n]{a^m}$$

$$3) (a^m)^n = a^{m \times n}$$

$$4) \frac{1}{a^n} = a^{-n}$$

$$5) \sqrt[n \times p]{a^{m \times p}} = \sqrt[n]{a^m}$$

Exemplos:

Calcular:

$$a) 49^{\frac{3}{4}} = \sqrt[4]{49^3} = \sqrt[4]{7^{2 \times 3}} = \sqrt[4]{7^3} = 18.52$$

ou

Pela HP:

$$49 [\text{ENTER}] 3 [\text{ENTER}] 4 [/] [Y]$$

Visor:
18.52

$$b) 64^{\frac{-2}{3}} = (2^6)^{\frac{-2}{3}} = 2^{-4} = \frac{1}{16} = 0.0625$$

ou

Pela HP:

64 [ENTER] 2 [CHS] [ENTER] 3 [/] [Y]

Visor:

18.52

AULA 4:

Juros Simples I

Taxa de Juros e quando usá-la. Cálculos dos juros simples.

Montante. Exemplos.

A **taxa de juros** indica qual remuneração será paga ao dinheiro emprestado, para um determinado período. Ela vem normalmente expressa da forma **percentual**, em seguida da especificação do período de tempo a que se refere:

- **10 % a.a.** - (a.a. significa ao ano).
- **15 % a.t.** - (a.t. significa ao trimestre).

Outra forma de apresentação da taxa de juros é a **unitária**, que é igual a taxa percentual dividida por 100, sem o símbolo %:

- **0,12 a.m.** - (a.m. significa ao mês).
- **0,10 a.q.** - (a.q. significa ao quadrimestre)

Utilizaremos esta notação para cálculos.

O regime de **juros** será **simples** quando o percentual de juros incidir apenas sobre o **valor principal**. **Sobre os juros gerados a cada período não incidirão novos juros.**

Valor Principal ou simplesmente **principal** é o valor inicial emprestado ou aplicado, antes de somarmos os juros.

Transformando em fórmula:

$$J = P \times i \times N$$

Onde: **J = Juros**
P = Principal
i = Taxa de juros
N = Número de Periódicos

Exemplo 1: Temos uma dívida de R\$ 1000,00 que deve ser paga com juros de 8% a.m. pelo regime de juros simples e devemos pagá-la em 2 meses. Os juros que pagarei serão: **1000 x 0.08 x 2 = 160**

Ao somarmos os juros ao valor principal temos o **montante**. Assim, **Montante = Principal + Juros**

Montante = Principal + (Principal x Taxa de juros x Número de períodos)

$$M = P \times (1 + (i \times N))$$

Exemplo 2: Quanto receberei em três anos por um empréstimo de R\$ 2500,00 a uma taxa de 12 % a.a. pelo regime de juros simples?
 R: R\$ 3400,00

$$M = 2500 \times (1 + (0.12 \times 3))$$

$$M = 2500 \times 1.36$$

$$M = 3400$$

AULA 5:

Juros Simples II

Taxas Equivalentes. Períodos Não-Inteiros. Exemplos.

Às vezes o período de aplicação ou empréstimo é uma fração do período expresso na taxa de juros. Nestes casos é necessário se trabalhar com a taxa equivalente. **Taxas Equivalentes** são aquelas que quando aplicadas a um mesmo capital, pelo mesmo período de tempo, produzem o mesmo juro.

Exemplo 1: Um banco oferece 36 % a.a. pelo regime de juros simples. Gostaria de saber quanto ganharia, se aplicasse R\$ 10.000 em 1 mês? R: R\$ 300,00

$$0.36 / 12 = 0.03 \text{ a.m. ou } 3 \% \text{ a.m.}$$

$$10.000 \times 0.03 = \mathbf{300}$$

Neste exemplo achamos primeiro a taxa mensal equivalente aos 36 % a.a., para calcularmos os juros gerados em 1 mês de aplicação.

Exemplo 2: Quanto equivalerá uma taxa de 3.05 % a.m., juros simples, em 22 dias de aplicação?

$$(0.0305 / 30) \times 22 = 0.0224 \text{ ou } 2.24 \%$$

Exemplo 3: Quanto devo pagar por uma dívida de R\$ 550,00 a uma taxa de 12 % a.t., juros simples, se já se passou 1 ano e 4 meses?

$$(0.12 / 3) \times 16 = 0.64$$

$$550 \times (1 + 0.64) = 902,00$$

AULA 6:

Exercícios Resolvidos

1. Calcule a taxa quadrimestral equivalente às seguintes taxas:
18 % a.s. = $(0.18 / 6) \times 4 = 12 \% \text{ a.q.}$

Pela HP:

0.18 [ENTER] 6 [/] 4 [x] 100 [x]

Visor:

12.00

2. Calcular os juros simples de R\$ 1200,00 a 13 % a.t. por 4 meses e 15 dias.

$$0.13 / 6 = 0.02167$$

$$\text{logo, } 4\text{m}15\text{d} = 0.02167 \times 9 = 0.195$$

$$j = 1200 \times 0.195 = 234$$

Pela HP:

0.13 [ENTER] 6 [-] 9 [X] 1200 [X]

Visor:

234.00

3. Para um principal de R\$ 5050,00, calcular as taxas de juros simples mensais, se o montante é de R\$ 5600,00 aplicado em 2 meses.

$$5600 = 5050 \times (1 + (i \times 2))$$

$$5600 / 5050 = 1 + 2i$$

$$1.10891 - 1 = 2i$$

$$i = 0.10891 / 2$$

$$i = 0.05445 \text{ ou } 5.45 \%$$

Pela HP:

5600 [ENTER] 5050 [-] 1 [-] 2 [-] 100 [x]

Visor:

5.44554

AULA 7:

Juros Compostos I

Quando usá-los.

Montante.

Cálculo dos juros compostos.

Exemplos.

O regime de **juros compostos** é o mais comum no sistema financeiro e portanto, o mais útil para cálculos de problemas do dia-a-dia. Os juros gerados a cada período são incorporados ao principal para o cálculo dos juros do período seguinte.

Chamamos de **capitalização** o momento em que os juros são incorporados ao principal.

Veja o que acontece em uma aplicação financeira por três meses, capitalização mensal:

mês 1: $M = P \times (1 + i)$

mês 2: o principal é igual ao montante do mês anterior: $M = P \times (1 + i) \times (1 + i)$

mês 3: o principal é igual ao montante do mês anterior: $M = P \times (1 + i) \times (1 + i) \times (1 + i)$

Simplificando:

$$M = P \times (1 + i)^n$$

É importante lembrar que a taxa i tem que ser expressa na mesma medida de tempo de n , ou seja, taxa de juros ao mês para n meses, e assim por diante.

Para calcularmos apenas os juros basta diminuir do montante ao final do período, o principal.

$$J = M - P$$

Exemplos:

1. Quanto renderá uma aplicação de R\$ 1000,00 por 1 ano se a taxa oferecida é de 3,5 a.m.? R: R\$ 511,07

| | | |
|-------------------------------|---|-----|
| 12 | Pela HP: | x |
| $M = 1000 \times (1 + 0.035)$ | $0.035 [\text{ENTER}] 1 [+] 12 [Y]$ | |
| $M = 1511,07$ | $1\ 000 [X] 1000 [-]$ | |
| $J = 1511,07 - 1000$ | | |
| $J = \mathbf{511,07}$ | | |

2. Quanto devo aplicar hoje para após 6 meses ter R\$ 5000.00 se a taxa é de 8 % a.m.? R: R\$ 3150,84

| | | |
|--------------------------------|---|-----|
| 6 | Pela HP: | x |
| $5\ 000 = P \times (1 + 0.08)$ | $0.08 [\text{ENTER}] 1 [+] 6 [Y]$ | |
| $P = 5\ 000 / 1.5869$ | $5\ 000 [/] [1 / X]$ | |
| $P = \mathbf{3\ 150,84}$ | | |

3. Que taxa está sendo paga por uma aplicação que após 3 meses rendeu R\$ 111,27 a um capital de R\$ 1200,00?

$$1311,27 = 1\ 200 \times (1 + y)^3$$

$$\sqrt[3]{1\ 311,27 / 1\ 200} = (1 + y)$$

$$y = 3\ \% \text{ a.m.}$$

Pela HP:

$$1\ 311,27 [\text{ENTER}] 1\ 200 [/]$$

$$3 [1 / X] [Y] 1 [-] 100 [X]$$

AULA 8:

Juros Compostos II
 Taxas Equivalentes.
 Taxas Nominais.
 Taxas Efetivas.
 Exemplos.

As taxas são equivalentes se, quando aplicadas a um mesmo capital, por um mesmo período, geram o mesmo rendimento. No regime de juros compostos a taxa equivalente de outra com n períodos será a raiz n desta taxa somada a 1

$$i_n = \sqrt[n]{(1 + i)} - 1$$

Exemplo:

Uma aplicação de R\$ 10.000,00 renderá quanto em 1 mês se os juros são de 15 % a.a.?

A taxa mensal equivalente aos 15% anuais é de :

$$\sqrt[12]{1,15} - 1 = 0,0117 \text{ ou } 1,17\ \% \text{ a.m.}$$

Pela HP: 1 [ENTER] 0.15 [+] 12 [1/X] [Y] 1 [-] = 0.01171
 Como vimos anteriormente as taxas nominais são normalmente expressas por períodos diferentes de suas capitalizações. Nestes casos a taxa efetiva envolvida na transação dependerá do número de capitalizações que a taxa nominal embutir.

Exemplo 1: uma taxa de 15 % a.a., capitalização mensal, terá 16.08 % a.a. como taxa efetiva.

$$\frac{15}{12} = 1,25 \qquad 1,0125^{12} = 1,1608$$

Exemplo 2: se a capitalização desta mesma taxa for semestral teremos 15.56 % a.a. de taxa efetiva.

$$\frac{15}{2} = 7,5 \qquad 1,075^2 = 1,1556$$

AULA 9 :

Exercícios Resolvidos

1. Qual os juros de uma aplicação de R\$ 5000,00 a 1.5 % a.m. por 2 meses?

$$J = 5\ 000 \times \left((1 + 0.015)^2 - 1 \right) = 151.13$$

Pela HP: $0.015 [\text{ENTER}] 1 [+] 2 [Y] 1 [-] 5\ 000 [X]$ **Visor:** 151.125

2. Uma loja vende seus produtos à vista com 5 % de desconto com cheque pré-datado para um mês, sem acréscimo, ou com pré-datado para 2 meses com acréscimo de 3%. Qual a melhor forma de pagamento se a poupança está pagando 3.5 % a.m.?

Pela HP: **opção2:** $100 [\text{ENTER}] 95 [/] 1 [-] 100 [X]$ **Visor:** 5.26316
opção3: $103 [\text{ENTER}] 95 [/] [G] [\sqrt{X}] 1 [-] 100 [X]$ **4.13**

A melhor forma de pagamento é à vista, já que os juros pagos pela poupança são menores que os cobrados pela loja.

3. Quanto deve ser aplicado hoje para se ter R\$ 10000,00 depois de 3 anos, se a taxa de juros for de 5 % a.m.?

$$10000 = P \times (1.05)^3 \quad P = 10000 / 5.79182 \quad P = 1726,57$$

Pela HP: $0.05 [\text{ENTER}] 1 [+] 36 [Y] 10000 [/] [1 / X]$ **Visor:** 1,726.57

AULA 10:

Fluxo de Caixa

Para que serve?

Traçando o diagrama.

Convenção do sinal.

Exemplo.

O fluxo de caixa serve para demonstrar graficamente as transações financeiras em um período de tempo. O tempo é representado por uma linha horizontal dividida pelo número de períodos relevantes para análise. As entradas ou recebimentos são representados por setas verticais apontadas para cima e as saídas ou pagamentos são representados por setas verticais apontadas para baixo.

Chamamos de VP o valor presente, que significa o valor que eu tenho na data 0; VF, valor futuro, que será igual ao valor que terei no final do fluxo, após juros, entradas e saídas. PMT é a prestação, ou as entradas e saídas durante o fluxo. Na HP a diferença entre entradas e saídas será simbolizada pelo sinal negativo e positivo, conforme convenção do usuário.

Exemplo:

Vejamos como calcular pela HP, o fluxo representado graficamente.

Primeiro zere as memórias: [F] [REG]

Entre com o Valor Inicial com o sinal negativo: 100 [CHS] [PV]

Entre com as prestações, uma a uma, prestando atenção aos sinais:

250 [CHS] [PMT]

150 [PMT]

450 [PMT]

350 [CHS] [PMT]

Aperte , então a tecla [FV] para obter o valor futuro do fluxo, 100.

AULA 11:

Cálculo do Valor Presente (VP)

Conceito

Apresentação de fórmula

Exemplos

O valor presente representa a soma das parcelas do fluxo, atualizadas para uma determinada data, anterior ao final do fluxo, considerando a mesma taxa de juros. Ele será obtido pela fórmula:

Na HP-12C ele é representado pela tecla PV, e será calculado facilmente com a entrada de alguns dados, pelo regime de juros compostos.

Exemplo: João fez uma dívida no banco para saldá-la em 24 prestações de R\$ 934,09. De quanto foi o empréstimo se a taxa de juros cobrada foi de 5 % a.m.?

Pela HP:

Limpe as memórias: [F] [REG]

Entre com as prestações: 934.09 [ENTER] [PMT]

Informe o número de parcelas: 24 [n]

Informe a taxa de juros: 5 [i]

Calcule o valor presente: [PV]

AULA 12:

Cálculos do Valor Futuro (VF)

Conceito.

Apresentação da fórmula.

Exemplo.

O valor futuro será a soma dos montantes de cada prestação em uma determinada data, calculados pela mesma taxa de juros. Ele é calculado pela fórmula:

Na HP ele é representado pela tecla FV. Vejamos um exemplo: João quer comprar um carro daqui a um ano. Quanto ele deve poupar por mês se o carro custa R\$ 10.000,00 e a taxa de juros oferecida pelo banco é de 3.5 % a.m.?

Pela HP:

Limpe as memórias: [F] [REG]

Entre com o valor futuro: 10000 [FV]

Entre com a taxa de juros: 3.5 [i]

Entre com números de meses: 12 [n]

Calcule as prestações: [PMT]

Curso de Matemática financeira

Ex.2: Paulo economiza para pagar sua faculdade R\$ 400,00 por mês. Sabendo-se que a taxa de juros corrente é de 50 % a.a., quanto custará o curso completo de 4 anos de duração? R\$ 47 284,99

Pela HP:

Limpe as memórias: [F] [REG]

Calcule a taxa de juros mensal: 1.5 [ENTER] 12 [1 / X] [

] 1 [-] 100 [X]

Entre com taxa de juros: [i]

Entre com número de meses: 12 [ENTER] 4 [X] [n]

Entre com as prestações: 400 [PMT]

Calcule o valor futuro: [FV]

AULA 13:

Amortizações de Empréstimos I

Sistema de Amortização Constante (SAC)

Exemplos.

Pelo **sistema de amortização constante**, o devedor paga o principal em parcelas iguais, e os juros sobre o saldo devedor. Desta forma as prestações são decrescentes, já que os juros diminuem a cada prestação.

Exemplo: Um empréstimo de R\$ 10 000,00 a uma taxa de 4 % a.m. a ser pago em 4 vezes pelo SAC tem as seguintes Prestações:

EXERCÍCIO RESOLVIDO

1) Uma empresa toma emprestado R\$ 60 000,00 em um banco, a uma taxa de 63 % a.a., por quatro meses, com amortizações mensais pelo SAC. Quanto esta empresa pagará de juros totais ao final dos quatro meses?

$$i = (0.63 / 12) = 0.0525$$

AULA 14:

Amortizações de Empréstimo II
Sistema Price - prestações iguais.
Exemplos.

Pelo sistema Price as prestações são iguais e periódicas. O capital é amortizado em parcelas variáveis, mais juros. Como neste caso a confecção de uma planilha manual, que separe o principal dos juros, é muito complicada, utilizaremos a HP-12C que já possui funções próprias para este cálculo.

Exemplo: Para comprar um apartamento você pega um empréstimo no banco de R\$ 40 000,00 a uma taxa de 15 % a.a. para pagá-la em 60 meses. Calcule o valor das prestações, dos juros e do total amortizado no primeiro, segundo e terceiro anos, separadamente.

| | |
|--|------------------|
| Pela HP: | Visor: |
| Limpe as memórias: [F][REG] | 0.00 |
| Entre com o empréstimo: 40 000 [PV] | 40 000.00 |
| Entre com o número de meses: 60 [n] | 60.00 |
| Entre com a taxa de juros: 15 [G][12/] | 1.25 |
| Calcule as prestações: 10 [PMT] | -951.60 |
| Calcule os juros no primeiro ano: 12 [F][AMORT] | -5 611.46 |
| Calcule o total amortizado no primeiro ano: [x y] | -5 807.70 |

Pela [F] [AMORT] temos o total dos juros pagos no período introduzido imediatamente antes. Note, que o período tem que ser expresso na mesma unidade da taxa, no caso, mensal. A tecla [x y] quando apertada após o cálculo dos juros, mostra o principal já amortizado.

Para calcularmos os juros e o principal referente ao segundo e terceiro anos repetiremos os passos abaixo:

| | |
|---|------------------|
| Pela HP: | Visor: |
| Calcule os juros do segundo ano: 12 [F][AMORT] | -4 677.85 |
| Calcule o total amortizado no segundo ano: [x y] | -6 741.32 |

Precisamos repetir a introdução de 12, para a calculadora entender que queremos os juros dos próximos 12 meses.

Veja que se somarmos o valor dos juros com amortização do segundo ano teremos R\$ 11,419.17, que dividido por 12 meses dará R\$ 951.60. Esta foi a prestação calculada anteriormente.

Curso de Matemática financeira

O mesmo acontece se somarmos os juros as amortizações do primeiro ano, o que demonstra que neste sistema as prestações são iguais, mas a relação de juros é diferente.

Calcularemos abaixo os juros e o principal referente ao terceiro ano:

Pela HP:

Visor:

Calcule os juros do terceiro ano: 12 [F][AMORT] -3 594.15

Calcule o total amortizado no terceiro ano: [x y] -7 825.05

Caso você queira saber quanto falta ainda ser amortizado:

[RCL] [PV]

19,625.93

Ou, se você preferir: $40\ 000 - 5807.70 - 6741.32 - 7825.05 = 19\ 625.93$

AULA 15:

Como calcular parcelas de Amortização de Financiamento.

Após ter pago 10 prestações fixas de R\$ 1170.60 do financiamento do seu carro novo, João recebe R\$ 10 000,00 de herança e quer pagar algumas prestações. O problema é que ele não sabe quanto do principal já pagou e quantas prestações ainda faltariam ser pagas, caso amortizasse R\$ 10 000,00. Ele pede sua ajuda e lhe diz que o preço do carro à vista era R\$ 23 000,00.

Pela HP:

Visor:

Limpe as memórias: [F][REG]

0.00

Entre com o empréstimo: 23 000 [PV]

23 000.00

Entre com o número de meses: 24 [n]

24.00

Entre com as prestações: 1 170.60 [CHS][PMT]

-1 170.00

Calcule a taxa de juros: [i]

1.67

Calcule os juros nso 10 meses: 10 [F][AMORT]

-3 215.82

Calcule o total amortizado no primeiro ano: [x y]

-8 490.18

Calcule quanto ainda falta pagar: [RCL] [PV]

14 509.82

Desconte os R\$ 10 000,00 do que falta ser pago e o restante introduza como novo valor inicial de empréstimo:

10 000 [-] [PV]

Visor:

4 509.82

Calcule o valor das novas prestações, se o saldo restante será pago em 4 vezes:

4 [n] [PMT]

Visor:

-1 174.82

Nestas últimas prestações quanto está sendo pago de juros:

4 [F] [AMORT]

Visor:

-189.46

Calcule quanto foi amortizado:

[x y]

Visor:

-4 509.82

AULA 16:

Como calcular coeficientes de financiamento?

Um gerente de uma agência de automóveis quer calcular coeficientes para financiamentos, por unidade de capital emprestado. Estes coeficientes quando aplicados ao total do capital darão como resultado a prestação. Sabendo-se que a agência cobra 5 % de juros ao mês, calcule coeficientes para 6 e 12 meses.

Pela HP:

| | |
|--|-----------------|
| Limpe as memórias: [F] [REG] | Visor: |
| Entre com a Taxa de Juros: 5 [i] | 0.00 |
| Entre com o número de meses: 6 [n] | 5.00 |
| Entre com a unidade de capital emprestado: 1 [PV] | 6.00 |
| Calcule o coeficiente para as prestações: [PMT] | 1.00 |
| | -0.19702 |

Desconsidere o sinal negativo. Ele só representa a direção de saída do fluxo. Neste caso, para um financiamento de R\$ 10 000,00, em 6 meses, as prestações devem ser de : $1\ 000 \times 0.19702 = 1\ 970,20$

Vejamos 12 meses:

| | |
|--|-----------------|
| Limpe as memórias: [F][REG] | Visor: |
| Entre com a Taxa de Juros: 5 [i] | 0.00 |
| Entre com o número de meses: 12 [n] | 5.00 |
| Entre com a unidade de capital emprestado: 1 [PV] | 12.00 |
| Calcule o coeficiente para as prestações: [PMT] | 1.00 |
| | -0.11283 |

AULA 17:

Análise de planos de pagamento

1) Um carro, que à vista custa R\$ 15 000,00 está sendo vendido a prazo com uma entrada de R\$ 8 500,00 e 12 prestações de R\$ 630,00 ou 24 prestações de R\$ 430,00 com a mesma entrada. Qual a melhor forma de pagamento?

R.: A primeira opção é mais barata.

1. opção:

O valor a ser financiado será $R\$ 15\ 000,00 - R\$ 8\ 500,00 = R\$ 6\ 500,00$

Pela HP:

| | |
|--|------------------|
| Limpe as memórias: [F] [REG] | Visor: |
| Calcule o Financiamento: 15 000 [ENTER] 8 500 [-] | 0.00 |
| Entre com o valor inicial: [CHS] [PV] | 6 500.00 |
| Entre com as prestações: 630 [PMT] | -6 500.00 |
| Entre com o número de meses: 12 [n] | 630.00 |
| Calcule a taxa de juros: [i] | 12.00 |
| | 2.40 |

2. opção:

Curso de Matemática financeira

O valor a ser financiado será R\$ 15 000,00 - R\$ 8 500,00 =
R\$ 6 500,00

| | |
|---|-----------|
| Pela HP: | Visor: |
| Limpe as memórias: [F] [REG] | 0.00 |
| Calcule o Financiamento: 15 000 [ENTER] 8 500 [-] | 6 500.00 |
| Entre com o valor inicial: [CHS] [PV] | -6 500.00 |
| Entre com as prestações: 430 [PMT] | 430.00 |
| Entre com o número de meses: 24 [n] | 24.00 |
| Calcule a taxa de juros: [i] | 4.08 |

AULA 18:

Análise de Investimento I

A partir da montagem de um fluxo de caixa podemos facilmente calcular, com a ajuda da HP-12C, a viabilidade de um projeto. Quando uma empresa ou uma pessoa deseja investir em um projeto, ela tem paralelamente outras opções, como por exemplo, a própria atividade produtiva, ou o mercado financeiro. Chamamos de **custo de oportunidade** de uma empresa ou pessoa, o retorno certo que ela teria sem investir em novos projetos.

Um investimento será viável se seu retorno for maior que o de qualquer outro tipo de aplicação, quando empregada a mesma quantia. Para sabermos isto basta montar um fluxo com o investimento efetuado e as receitas e economias esperadas, além da taxa mínima de retorno desejada (deverá ser maior que seu custo de oportunidade). A partir deste fluxo entraremos com os dados na HP-12C e calcularemos o **Valor Presente Líquido (NPV)**, que será o resultado na data de hoje de todas as saídas e entradas, considerando-se taxa mínima de retorno desejada. Se o valor do NPV for positivo significa que o investimento é viável e a taxa de retorno é ainda maior que a desejada. Se o valor for igual a zero, significa que o investimento retornará exatamente o desejado e, portanto, é viável. Se o valor for negativo, o retorno não será o mínimo desejado, valendo mais a pena investir no mercado financeiro ou na produção.

Exemplo: Ana tem R\$ 10 000,00 aplicados no banco pelos quais recebe 4 % a.m.. Ela deseja abrir uma pequena confecção, mas antes quer saber se o investimento valerá a pena. Ela montou o seguinte fluxo de caixa e considera que o mínimo de retorno desejável seria de 8 % a.m.

Verifique se o investimento é viável.

Pela HP:

Limpe as memórias: [F] [REG]

Entre com o valor inicial: 6 000 [CHS] [G] [CFo]

Entre com as parcelas do fluxo:

4 000 [CHS] [G] [CFj]

2 000 [G] [CFj] 2 [G] [Nj]

3 000 [G] [CFj]

2 000 [G] [CFj]

1 000 [CHS] [G] [CFj]

2 000 [G] [CFj] 2 [G] [Nj]

3 000 [G] [CFj]

Entre com a taxa de retorno esperada: 8 [i]

Calcule o valor presente líquido: [F] [NPV]

Calcule a taxa interna de retorno: [F] [IRR]

Logo, este investimento é viável, pois NPV é positivo e IRR é maior que 8 %.

Visor:

0.00

-6 000.00

-4 000.00

2.00

3 000.00

2 000.00

-1 000.00

2.00

3 000.00

8.00

282.99

8.67%

AULA 19:

Análise de Investimento II

Outra forma de avaliação da viabilidade de um investimento é o método do Pay Back Time, ou tempo de retorno do capital. Vejamos um investimento, cujo fluxo se apresenta da seguinte forma:

O custo de oportunidade para este capital é de 4 % a.m., ou seja, se não fosse investido, este capital renderia 4 % a.m. em uma aplicação financeira.

Pela HP:

Limpe as memórias: [F] [REG]

Calcule o montante se o capital inicial fosse

aplicado no mercado financeiro: 0.04 [ENTER] 1

[+] 6 000 [X]

Visor:

0.00

6 240.00

10 649.60

8 649.60

Curso de Matemática financeira

| | |
|--|-----------|
| Entre com o segundo investimento: 4 000 [+] | 8 995,58 |
| 1.04[X] | 6 995.58 |
| Subtraia o primeiro retorno: 2 000 [-] | 7 275.41 |
| Calcule o montante sobre o resultado: 1.04 [X] | 4 275.41 |
| Subtraia o segundo retorno: 2 000 [-] | 4 446.42 |
| Calcule o montante sobre o resultado: 1.04 [X] | 1 446.42 |
| Subtraia o terceiro retorno: 3 000 [-] | 1 504.28 |
| Calcule o montante sobre o resultado: 1.04 [X] | -1 495.72 |
| Subtraia o quarto retorno: 3 000 [-] | |
| Calcule o montante sobre o resultado: 1.04 [X] | |
| Subtraia o quinto retorno: 3 000 [-] | |

O retorno deste investimento se dará a partir do sexto mês.

Sites interessantes

<http://www.turisrio.ubbihp.com.br>
<http://www.mercadolivros.ubbihp.com.br>
<http://www.solidariar.hpg.ig.com.br>
<http://www.genealogia.xpg.com.br>
<http://www.idiomas.xpg.com.br>
<http://www.gerosat.xpg.com.br>
<http://www.oportunity.ubbihp.com.br>
<http://www.informatico.ubbihp.com.br>
<http://www.eaglesfly.ubbihp.com.br>
<http://www.geronetservices.com>

Conteúdo

Turismo no Rio de Janeiro
Livros usados
Solidariedade e meio ambiente
Genealogia de famílias brasileiras
Principais idiomas do mundo - dicas
Eletrônica e eletricidade
Oportunidade de negócios na internet
Informática ao alcance de todos
Água potável
Apostilas e cursos via email e
downloads grátis